EN ROUTE VERS LA TERMINALE SPECIALITE MATHS

Tu trouveras ici quelques incontournables à travailler ou à revoir pour bien aborder la Terminale spécialité maths.
Tu trouveras tous les rappels nécessaires :

sur la chaîne YouTube **MATHS EN TÊTE**	sur le site www.mathsentete.fr

Partie A : ALGEBRE

[Suites et 2nd degré]

Exercice A1 : calcul des termes de suites

Calculer les 3 premiers termes de chacune des suites suivantes, en précisant si ces dernières sont définition par récurrence ou de manière explicite :

a) $u_n = 2n^2 - n + 1$ b) $\begin{cases} v_1 = -2 \\ v_{n+1} = \frac{1-v_n}{n} \end{cases}$ c) $w_0 = 5$ et $w_{n+1} = 2w_n - 1$ d) $t_n = 3[1 + (-1)^n] + 2$

Exercice A2 : suites arithmétiques et géométriques

1) Soit (u_n) arithmétique de 1er terme 2 et de raison -3.
   a) Donner sa définition par récurrence et sa définition explicite.
   b) En déduire une valeur de u_{1000}.
2) Soit (v_n) définie pour tout n entier naturel par $v_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   a) Expliquer pourquoi cette suite est géométrique.
   b) Donner sa définition par récurrence.
   c) Montrer que la somme $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{10}$ vaut environ 7,996.

Exercice A3 : « où l'on parle de suite géométrique ».

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 euros.
Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente. On note (u_n) la suite des primes avec $u_0 = 500$.

1) Calculer u_1 puis u_2 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année).
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3) Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
   a) Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année.
   b) Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années.

Exercice A4 : conjecture de limite à la calculatrice

A la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (t_n) définie par $t_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $t_{n+1} = 0{,}5t_n - 12$

Exercice A5 : **monotonie d'une suite**

Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul n par $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ grâce à chacune des trois méthodes suivantes :

a) en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
b) en comparant le quotient u_{n+1}/u_n à 1 (on s'assurera au préalable que tous les termes de la suite sont strictement positifs)
c) en étudiant les variations de la fonction f telle que $u_n = f(n)$.

Exercice A6 : résolution d'équation du 2nd degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré suivantes :

a) $2x^2 - 2x - 12 = 0$ b) $-x^2 + x + 2 = 0$ c) $3x^2 + x\sqrt{12} + 1 = 0$
d) $4x^2 + 16 = 0$ e) $x^2 + x = 0$

Exercice A7 : signe d'une expression (fonction affine et polynôme du 2nd degré)

a) Déterminer le signe de $4x - 7$.
b) Déterminer le signe de $-2x^2 + 7x - 6$.

Exercice A8 : résolution d'inéquations du 2nd degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations du second degré suivantes : a) $-x^2 + x + 2 > 0$ b) $3x^2 - 2x \geq 0$

Exercice A9 : une inéquation pour les dominer toutes !

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{2t}{1-t} \geq \frac{t+2}{t}$$

Partie B : PROBABILITES

[Probabilités conditionnelles et variables aléatoires]

Exercice B1 : **maladie et diagnostic**

Des études statistiques montrent que 6% des individus d'une population souffrent d'une maladie donnée.
Un test est utilisé pour diagnostiquer la maladie. On a les résultats statistiques suivants :

- Sachant qu'un individu est malade, la probabilité qu'il ait un test positif est de 0, 95.
- Sachant qu'un individu n'est pas malade, la probabilité qu'il ait un test négatif est de 0, 97.

On désigne par M l'événement « être malade » et par T l'événement « avoir un test positif ».

1) Calculer les probabilités des événements « être malade et avoir un test positif », « ne pas être malade et avoir un test négatif », « ne pas être malade et avoir un test positif ».
2) En déduire la probabilité d'avoir un test positif.
Quelle est la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade ?

Exercice B2 : probabilité conditionnelle et tableau

Dans l'étude de certaines maladies, on voudrait savoir si le fait de fumer joue un rôle aggravant ou pas.

On dispose des statistiques ci-contre concernant une population de 20 000 personnes.

	Malades	Sains	Total
Fumeurs	400	4600	
Non-fumeurs	600	14400	
Total			

On note M l'événement « la personne est malade » et F l'événement « la personne fume ».

On choisit au hasard une personne dans cette population.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
2. a. Calculer $p_F(M)$.

   b. Que représente la probabilité précédente ?
3. Si l'on sait que cette personne ne fume pas, quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
4. Le fait de fumer est-il un facteur aggravant ?

Exercice B3 : probabilité et temps partiel

Dans une enquête menée auprès d'une population, on a constaté que :

- 60% de la population sont des femmes ;
- 56% des femmes travaillent à temps partiel ;
- 36% de la population travaillent à temps partiel.

On interroge une personne dans la population. Elle affirme qu'elle travaille à temps partiel.

Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?

Exercice B4 : loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire *X* est donnée par le tableau ci-dessous :

Valeurs x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	0,10	0,05	0,15	0,05	0,10	0,20	0,10	0,10	a

1) Déterminer la valeur de a.
2) a) Calculer $p(X > 3)$.

   b) Calculer $p(X \leq 3)$.

Exercice B5 : variable aléatoire et espérance.

Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On tire au hasard une boule, on note le numéro, on replace cette boule, on tire une deuxième boule et on fait la somme X des nombres inscrits sur les boules tirées.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Si je gagne la valeur de X, combien puis-je espérer gagner ?

Exercice B6 : « Arbre pondéré et variable aléatoire ».

Sur la planète Dictat, le gouvernement met en œuvre une politique nataliste.

Toute famille doit avoir au moins un enfant, au plus trois enfants et au plus un garçon.

Dès que l'on a un garçon, on n'a pas d'autre enfant.

Soit *X* la variable aléatoire comptant le nombre d'enfants d'une famille.

On suppose l'équiprobabilité des garçons et des filles à la naissance.

1) Déterminer la loi de probabilité de *X*.
2) Calculer *E*(*X*).

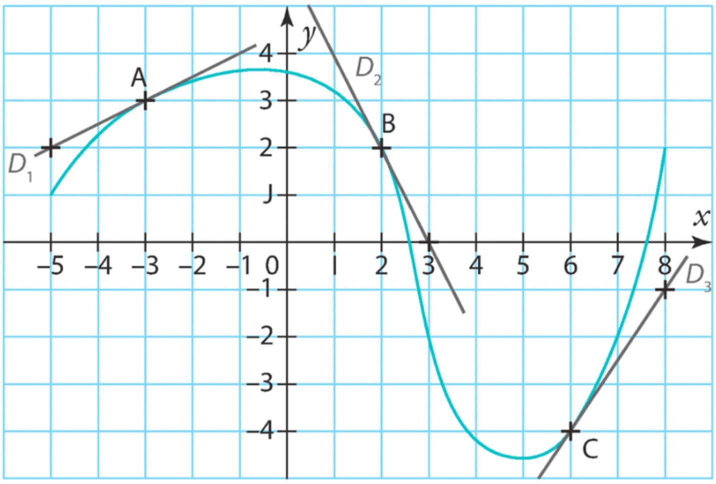
Partie C : FONCTIONS

[Dérivation, étude de fonction, exponentielle]

Exercice C1 : lecture de nombres dérivés

Sur le graphique suivant, C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 8]$.

D_1, D_2 et D_3 sont respectivement les tangentes à C_f aux points A, B et C d'abscisses -3, 2 et 6.



1) Lire sur le graphique les valeurs de :
   a) $f(-3)$, $f(2)$ et $f(6)$
   b) $f'(-3)$, $f'(2)$ et $f'(6)$
2) Pour quelle abscisse a semble-t-on avoir $f'(a) = 0$?
   Quelle conséquence graphique pour la tangente au point d'abscisse a ?

Exercice C2 : dérivées, techniques et rédaction

Déterminer les fonctions drivées des fonctions suivantes sur le domaine d'étude précisé :

a) $f_1(x) = 3x^4 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}$ sur $D_1 =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

b) $f_2(x) = x \times \sqrt{x}$ sur $D_2 =]0; +\infty[$

c) $f_3(x) = \frac{-2x-3}{x+2}$ sur $D_3 =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

d) $f_4(x) = (1-x)^4$ sur $D_4 = \mathbb{R}$

Exercice C3 : nombre dérivé et équation de tangente

Soit f la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ de courbe représentative C_f dans un repère du plan.

1) a) Déterminer $f'(-1)$.
   b) Que représente ce nombre ?
2) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse -1.

Exercice C4 : étude de variations

Après avoir donné leur ensemble de définition et de dérivabilité, étudier le sens de variation des fonctions suivantes :

$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 4$

Exercice C5 : utiliser les règles de l'exponentielle

a) Simplifier $A = \frac{e^{3x} \times e^{-x}}{e^x}$ et $B = e^x \times (e^{-2x})^3$

b) Développer $C = e^2(e^{-2} + e)$ et $D = (e^4 - e)(e^4 + e)$.

c) Factoriser $E = 2e^{6x} - e^{2x}$.

Exercice C6 : dérivées et exponentielle

Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'ensemble précisé.

a) $f : x \longmapsto -3e^x + 4e^{-2x+1} + e$ sur $\mathbb{R}$

b) $g : x \longmapsto (e^x + 1)(e^x - 1)$ sur $\mathbb{R}$

c) $h : x \longmapsto \frac{4}{e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$

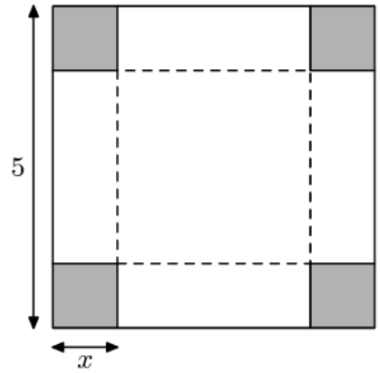
d) $h : x \longmapsto \frac{x+1}{e^x}$ sur $\mathbb{R}^*$

e) $k : x \longmapsto \frac{e^x+1}{e^x-1}$ sur $]0; +\infty[$

<u>Exercice C7</u> : volume d'une cuve

On veut construire une cuve métallique à partir d'une plaque carrée de 5 m de côté. À chaque coin de la plaque, on découpe un carré de côté x m.

En pliant et en soudant, on obtient alors une cuve et on note V la fonction donnant son volume en fonction des valeurs de x.



1) Déterminer l'ensemble de définition puis l'expression de la fonction V.
2) Étudier les variations de la fonction V.
3) Déterminer les dimensions de la cuve de volume maximal.

<u>Exercice C8</u> : avec une fonction auxiliaire.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)e^x + x + 1$.

1) Déterminer une expression de $f'(x)$.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^x + 1$
   a) Étudier les variations de g.
   b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$
3) Montrer que $f'(x) = g(x)$ et en déduire les variations de la fonction f

<u>Exercice C9</u> : un caillou à la mer

Un enfant monte au sommet d'un phare et laisse tomber verticalement un caillou dans la mer.

On modélise la vitesse (en mètre par seconde) du caillou au bout de t secondes par la fonction :

$$f(t) = 6 \times \frac{e^{0,1t} - 1}{e^{0,1t} + 1}$$

1) Vérifier que le caillou est bien lâché sans vitesse initiale selon ce modèle.
2) a) Déterminer une expression de $f'(t)$.
   b) Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
3) La vitesse du caillou dépassera-t-elle les 10 m.s^{-1} ?

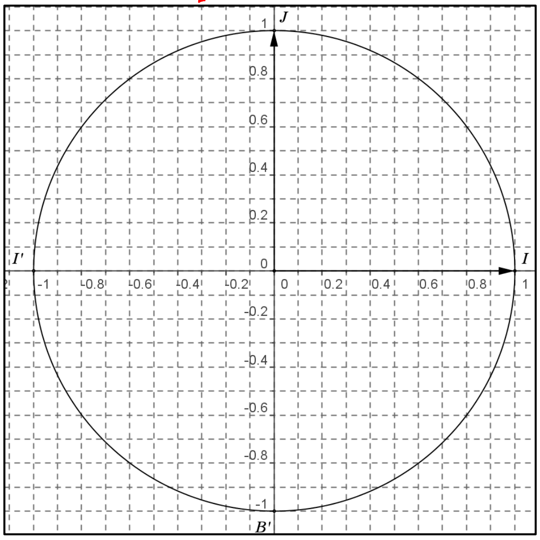
Partie D : GEOMETRIE

[Trigonométrie, produit scalaire et géométrie repérée]

<u>Exercice D1</u> : savoir utiliser le cercle trigo

En s'aidant du cercle trigonométrique :

1) Placer 5π, $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{9\pi}{4}$.
2) Donner la mesure principale de $\frac{123\pi}{6}$.



<u>Exercice D2</u> : valeurs de cosinus et sinus

Grâce au cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes :

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ b) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ c) $\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

d) $\cos\left(\frac{-11\pi}{3}\right)$ e) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ f) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

g) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ h) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ i) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ j) $\sin(15\pi)$

<u>Exercice D3</u> : produit scalaire et vecteurs orthogonaux

On considère un repère orthonormé du plan.

a) Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ sont orthogonaux ? *Justifier.*

b) $\vec{w}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\-4\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ? *Justifier.*

c) Déterminer les éventuelles valeurs réelles de a pour que $\vec{t_1}\begin{pmatrix}3\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{t_2}\begin{pmatrix}6\\-a\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

<u>Exercice D4</u> : droites perpendiculaires et produit scalaire (méthode analytique)

Dans un repère orthonormé du plan, on donné $A(5;3)$, $B(8;-5)$, $C(-1;0)$ et $D(3;1{,}5)$.

Montrer que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

<u>Exercice D5</u> : produit scalaire et nature de quadrilatère

Dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$ orthonormé, on considère les quatre points suivants $A(-3;2)$; $B(-2;-2)$; $C(2;-1)$ et $D(1\,;3)$.

1) Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
2) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

<u>Exercice D6</u> : équations cartésiennes et vecteur directeur

1) Soit (d) la droite passant par $A(4;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-3)$.
   Déterminer une équation cartésienne de (d).
2) Soit (d') la droite d'équation cartésienne $3x-1{,}5y+1=0$.
   Le vecteur $\vec{v}(-4{,}5;-9)$ est-il un vecteur directeur de (d') ?

<u>Exercice D7</u> : droite, vecteurs directeurs et normaux, équations cartésiennes et réduites

On considère la droite d d'équation réduite $y=-4x+5$.

1) Donner un vecteur directeur de d.
2) En déduire un vecteur normal de d.
3) Donner une équation cartésienne de la droite d' perpendiculaire à d pasant par le point $A(1;1)$.
4) Donner une équation réduite de la droite d'.

<u>Exercice D8</u> : vecteur normal et équation cartésienne de droite

1) Donner un vecteur normal de chacune des droites suivantes :
   $d_1 : -3x + 2y + 1 = 0$ $d_2 : 5x + y - 6 = 0$ $d_3 : y = -2x + 4$ $d_4 : x = 1$
2) Dans chacun des cas, donner une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
   a) $A(4;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ b) $A(2;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ c) $A(-2;-1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ d) $A(0;5)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

<u>Exercice D9</u> : projeté orthogonal d'un point sur une droite

On considère la droite d d'équation cartésienne $-3x + 2y - 11 = 0$ et le point $A(1;-6)$.
Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite d.
On pourra réaliser un dessin à main levée pour visualiser la situation.